CONCEPCIONES DEL ESPACIO GEOMÉTRICO Y SU RELACIÓN CON EL INFINITO

Patricia Lestón
Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González" (Argentina)
patricialeston@gmail.com

Resumen. El concepto matemático de infinito es habitualmente relacionado con el trabajo de Cantor, quien lo formaliza y lo hace aceptable para la comunidad científica. Sin embargo, la inclusión de este concepto en discusiones de la ciencia moderna es anterior, aún cuando en la matemática se rechazaba su uso. El estudio del espacio hizo entrar a físicos y matemáticos en controversias acerca de la extensión del mismo, varios siglos antes del trabajo de Cantor. Desde Nicolás de Cusa hasta Leibniz y Newton pueden hallarse idas y vueltas en la construcción de una noción a la cual aún le quedarían algunos siglos para ser aceptada y en los cuales se observan algunas respuestas que surgen en los estudiantes en el aula de matemática.

Palabras clave: infinito, historia de la matemática, infinito espacial

Abstract. Within Mathematics, infinite is a concept generally related to Cantor's work, who was responsible of formalizing and making it acceptable for the rest of the scientific community. Nevertheless, this concept was part of the discussions, way before he was part of the picture, even though mathematicians neglected its use. The study of the space made physicists and mathematicians collide around the extension of space, centuries before Cantor's work. Since Nicolás de Cusa to Leibniz and Newton, it is possible to find the roundabouts in the construction of infinity, concept that still needed years to go by until it became accepted. Along the history of the concept it is often seen some answers similar to the ones students have at school.

Key words: infinite, history of mathematics, infinity of the space

Introducción

La matemática escolar es un conjunto de nociones y procesos que la comunidad de la cual forma parte esa escuela considera de valor para la cultura del grupo, para su crecimiento como sociedad y la validación de lo que es un ser "educado". Esa matemática escolar es, en la mayoría de los casos, el producto de lo que a lo largo de historia y políticas educativas se ha ido constituyendo como cuerpo de saber autónomo (Cantoral, 1995). Sin embargo, esas "idas y vueltas" en la constitución de la matemática escolar hacen que en algunos casos se pierda percepción de lo que se está haciendo o las razones o motivos que hacen que la escuela haga lo que hace. Además de esto, ocurre también que la escuela en su constitución como institución se ha ido alejando del grupo o comunidad de la cual es resultado, perdiendo de vista lo que en la comunidad se construye.

Dentro de la matemática escolar, el cálculo se ha constituido como uno de los ejes centrales de la formación del ciudadano. Nociones como límite, derivada, variación, función y muchas otras se entienden en la actualidad como imprescindibles dentro del discurso matemático escolar. Esas nociones y otras se apoyan sobre otros elementos, la mayoría de los cuales se discuten y presentan a lo largo de los años previos de educación escolarizada. Sin embargo, el infinito, noción sobre la cual se apoyan la mayoría de estos conceptos, no forma parte de la matemática escolar, aún cuando aparece en distintos momentos del discurso matemático escolar. Este concepto es, aunque utilizado, olvidado como elemento a ser construido escolarmente.

En esta investigación tomamos como hipótesis que la existencia del infinito como elemento sociocultural, su presencia como *evidencia familiar* (Cantoral, 1995) que sirve de punto de partida para construir otras nociones; ha permitido que la escuela asuma que esa construcción no escolar que se ha hecho es suficiente y compatible con lo que la escuela necesita, lo que no siempre es cierto.

Tomamos como evidencia para esta hipótesis, las características del infinito intuitivo que se presentaron en Lestón (2008) que, en general, distan mucho de lo que es el infinito matemático. Sin embargo, esa distancia no es contemplada por la escuela, lo que creemos provoca que aparezcan conflictos en las aulas cuando los docentes hablan o utilizan al infinito: hay una ruptura entre lo que los estudiantes entienden por infinito y lo que los docentes creen que están entendiendo o necesitan que sus alumnos entiendan.

Para el caso del infinito, la escuela toma una postura filosóficamente distinta a la que le es habitual, rechazando todo lo que viene de la cultura popular: no sólo acepta la definición o caracterización que para el infinito la comunidad ha construido, sino que, sin averiguar de qué se trata, la asume como matemáticamente válida. La matemática educativa como disciplina ha comenzado a reconocer lo que ocurre con este tipo de nociones y formas de accionar, y está intentando dar respuesta a estas cuestiones.

> Puede decirse que la problemática de estudio de la matemática educativa se centra […] en el análisis de los fenómenos que ocurren cuando el saber matemático, que se construye fuera de la institución escolar, en escenarios académicos o no, es introducido y se desarrolla en el sistema educativo. (Castañeda, Buendía, Crespo Crespo, Lezama, Molina, Montiel, Martínez, Rosas y Sánchez, 2008, p.5)

Se reconoce entonces que el saber matemático es producto de diversos escenarios: académicos y no académicos. El infinito al que llamamos intuitivo es una construcción cultural, producto de un escenario sociocultural no académico, que, aunque relacionado con una noción matemática de incontable, inconmensurable o, simplemente, sin fin; es distinto al infinito matemático, producto de un escenario académico.

La socioepistemología como marco para esta investigación

Esa mirada que estamos planteando, en la cual podemos ir y volver de lo académico a lo no académico, hace que necesitemos de un marco teórico que sostenga la idea de que lo que no es académico en sí mismo también es valioso, que las construcciones que se dan por fuera de la escuela también deben considerarse al momento de comprender lo que sucede en las aulas, que respete a lo social de la construcción de conocimiento como algo que debe ser atendido.

Bajo esta postura es que se inscribe a esta investigación en un referente teórico que contempla a "lo social" como influencia fundamental para la construcción de conocimiento: la socioepistemología.

> Cuando se trata de indagar las condiciones de creación y desarrollo de las ideas matemáticas, así como las circunstancias sociales o culturales que posibilitan su construcción o los factores extra-matemáticos que moldea y permea el conocimiento, una epistemología en el sentido tradicional no alcanza a ofrecer explicaciones sobre este tipo de preguntas de naturaleza sociocultural. Se requiere entonces de un acercamiento epistemológico sensible a reconocer, entre otras; la naturaleza del conocimiento, los procedimientos de comunicación hacia los colectivos, así como los mecanismos por los que una cultura ejerce influencia en la formulación de ese conocimiento (Castañeda, 2008, p. 503)

Castañeda (2008) presenta así a la socioepistemología, que reconoce no sólo la naturaleza del conocimiento matemático sino su pertinencia y su pertenencia al seno de una comunidad. Sin una comunidad, sin una cultura, sin "lo social", la matemática pierde sentido.

El origen del infinito como concepto matemático

Lo que en este momento de la investigación estamos tratando de comprender es cómo el infinito, que se origina como una noción filosófica o religiosa, se constituye en una noción matemática. Lo que queremos comprender es cuál fue el proceso que hizo de puente entre ese infinito "muy grande" que se desprende de lo que adquirimos a través de los sentidos (que nosotros hemos llamado intuitivo) y el infinito de la matemática, de la cardinalidad, de Cantor, construido de acuerdo a las leyes de la matemática. Porque si logramos detectar ese proceso, podemos entonces comprender la evolución del concepto y podemos intentar algo en nuestras aulas que nos permita acercar a nuestros alumnos al infinito matemático, tomando como base ese infinito intuitivo que ya traen. Para esto, nos planteamos un recorrido histórico del concepto desde la antigüedad hasta Cantor, y la escuela actual. En este documento, sólo presentamos una parte de este estudio.

Puede distinguirse ya desde la antigüedad en Occidente, una dicotomía en el tratamiento que se hace de este concepto: la aceptación del infinito como propiedad asignada al espacio, con lo cual podría aceptarse su existencia o el rechazo del mismo como elemento, cuya sola existencia se sustenta en la divinidad, y no es posible asumirle a ninguna otra cosa.

> La dificultad que plantea el infinito radica, así pues, en su inagotabilidad: lo que es infinito (Aristóteles hace referencia al ejemplo del conjunto de números) no puede estar nunca presente en su totalidad en nuestro pensamiento. (Zellini, 1991, p. 13)

En esta época también puede reconocerse otra distinción en relación al infinito: el infinito potencial, como posibilidad por adición o división hasta el infinito, y el infinito actual, como realidad completa. Aristóteles creía, como se ha presentado anteriormente, que no existe el infinito separado de aquello que podemos vincular con él, al igual que el número existe sólo en función de aquello que lo representa. Para él no hay posibilidad de que exista el cuerpo infinitamente grande (De Mora, 2009). Sin embargo, no fue Aristóteles el único que analizó estas cuestiones, y muchos de los griegos que estudiaron el infinito no acordaban con él. Sin embargo, las ideas aristotélicas fueron las que más fuertemente llegaron a Occidente y es por eso que no es sino hasta el fin de la Edad Media que estas cuestiones se volverían a discutir fuertemente.

Es Nicolás de Cusa uno de los primeros a los cuales se le adjudica la declaración de un universo infinito. Sin embargo, no es esto del todo cierto, en alguna medida, tanto él como Descartes, guardan para Dios ese calificativo. Pero a pesar de esto último, hay ideas en de Cusa que permiten vislumbrar la necesidad de romper con los límites del Universo y aceptar que su extensión es infinita, al menos para el entendimiento humano. "Su universo no es infinito (infinitum), sino "interminado" (interminatum), lo cual significa no sólo que carece de fronteras y no está limitado por una capa externa, sino también que no está "terminado" por lo que atañe a sus constituyentes; es decir, que carece expresamente de precisión y de determinación estricta". (Koyré, 2008, p. 12)

Ahora bien, si Nicolás de Cusa no nos dice que el Universo es infinito, por qué iniciamos el relato con él. El gran aporte de este matemático fue su ruptura del Universo cerrado, el permiso para poder entender que no hay nada que actúe de límite o frontera; y con eso dio el primer paso para abrir la posibilidad de su real infinitud. Aún así, se cuida de declararlo de manera abierta; "aunque el mundo no es infinito, con todo no se puede concebir como finito, ya que carece de límites entre los que se halle confinado" (Koyré, 2008, p. 16)

Fue necesario esperar a que Giordano Bruno se pronunciara abiertamente la creencia de un espacio infinito. Él no se queda con la dificultad de asignarle límites, sino que afirma sin lugar a duda su infinitud.

> Hay un único espacio general, una única y vasta inmensidad que podemos libremente denominar Vacío: en él hay innumerables globos como este en el que vivimos y crecemos; declaramos que este espacio es infinito, puesto que ni la razón, ni la conveniencia, ni la percepción de los sentidos o la naturaleza le asignan un límite. (Koyré, 2008, p. 43)

Ni la razón, ni la conveniencia ni la percepción. Ese espacio del que nos habla Bruno, que es infinito porque no hay motivo para que no lo sea, es el que dará inicio a un proceso que convierte al infinito en entidad científica, dejando de lado su naturaleza religiosa y casi mágica. Es la "extensión" del espacio en el cual vivimos, y como tal, debe ser considerada parte de aquello que se estudia desde la astronomía, de lo que la matemática intenta modelizar, de lo que la física observa para explicar las leyes de la naturaleza. Ese quiebre de pronunciamiento sin dubitación cambia la historia de la matemática, incorporando a los elementos matematizables al infinito como la verdadera extensión del Universo.

Sin embargo, no es hasta que Newton retoma las nociones de Bruno, que finalmente se acepta que el espacio, que nuestro universo, es en sí infinito. La manera en que logra esta empresa es a través de las propias nociones que nos llegan como distinguidas de su obra: la separación de lo relativo y lo absoluto, el principio de inercia como motor del mundo.

> De ahí que los movimientos enteros y absolutos no se puedan determinar de otro modo que mediante lugares inmóviles. Por esa razón refería yo antes aquellos movimientos absolutos a lugares inmóviles y los relativos, a lugares móviles. Ahora bien, no hay otros lugares inmóviles que aquellos que, de infinito a infinito, retienen todos la misma posición dada unos respecto a otros y, bajo este supuesto, deben permanecer siempre inmóviles, constituyendo así el espacio inmóvil. (Newton citado en Koyré, 2009, p. 155)

Esos lugares inmóviles de los que Newton habla son lo que Giordano Bruno definía como espacio infinito: es esa extensión completa y absoluta que permite que los lugares móviles (aquellos que ocupan los cuerpos en distintos instantes) sean observables, medidos y distinguidos. Lo que Newton logra con su obra es lograr finalmente la "explosión de la esfera" y la definitiva geometrización del espacio.

Y es subidos a los hombros de Newton que otros matemáticos luego intentarán otras explicaciones para la afirmación newtoniana de un espacio y tiempo verdaderamente infinitos, que cuentan además con infinitos mundos girando alrededor de infinitas estrellas soles, como postulaba Bruno. Raphson, por ejemplo, intenta una justificación axiomática de un espacio infinito, que tal vez, haya permitido hacer sentir esta noción “más científica”, aunque seguramente no hubiera convencido a nadie si no estaban ya convencidos por las ideas de Newton.

Bolzano, como se dijo al inicio de este apartado, no propone una definición para este infinito matemático, producto de muchas construcciones que se dieron a lo largo de la historia de la matemática misma. Sin embargo, al menos aporta condiciones que ajustan la posible definición de este concepto. Plantea qué cuestiones es necesario atender, qué argumentos pueden esgrimirse en contra de aquello que se propone como posible salida para el embrollo en que los matemáticos estaban metidos. Era necesaria una definición, una teoría que explicara cómo tratar al infinito, desde dónde mirarlo, cómo estudiar lo que se hacía y decía sobre él. Es en esas condiciones que el trabajo de Cantor aparece, y aún cuando fue negado en su inicio, logró resolver elegantemente la situación planteada. Queda aún por ver, sin embargo, qué relación existe entre este infinito que Cantor caracteriza tan bien, y aquel que fue respuesta a una pregunta que llegó hasta Newton en relación a la extensión del Universo.

Es dentro de su plan de construir una teoría rigurosa de todo lo orgánico, lo que cuenta con armonía y consonancia, que Cantor se encuentra en la necesidad de la creación de nuevas herramientas matemáticas, lo que hoy conocemos como la teoría de conjuntos.

> Cantor empezó estudiando los dos conjuntos de puntos más interesantes: el conjunto de los números racionales y los números reales. Buscaba diferencias entre los dos que fueran relevantes en relación con el hecho de que los números reales son continuos mientras que los racionales no lo son (Lavine, 2005, p. 56).

Su interés provenía del análisis y no conocía ningún conjunto más grande que el conjunto de los números reales.

> Precisamente entre 1882 y 1885, años clave por la riqueza y profundidad de las nuevas ideas que publicó, Cantor elaboró algunas hipótesis sobre la constitución de la materia y del éter, explotando su nuevo análisis conjuntista del continuo, e introduciendo ideas novedosas en teoría de conjuntos de puntos. Su pretensión era desarrollar una gran teoría unificada de fuerzas físicas y químicas, con vistas a aplicarla al reino biológico y así avanzar en el proyecto organicista. (Ferreirós, 2003, p. 177)

El siglo XIX fue un período muy productivo en la historia de la matemática, en el que se vieron avances fundamentales en campos como el de las geometrías no euclideanas y la aritmetización del análisis. Ésta última llevada a cabo por Weierstrass, Dedekind y otros, con el objetivo de quitar a la intuición dinámica y geométrica (que se creía era la causa de las paradojas), reduciendo el campo del cálculo desarrollado en el siglo XVII por Newton y Leibniz, al campo de los números. (Núñez, 2003)

En este proceso, fue esencial contar y ordenar elementos como números y puntos. El desarrollo de una teoría para los números transfinitos tanto en su aspecto cardinal como ordinal debió enfrentarse a visiones fuertemente arraigadas no sólo por resultados que en muchas oportunidades contradecían a la intuición, sino a aquellas que impedían el uso del infinito actual y su consideración como un objeto matemático sobre el que era posible elaborar una teoría científica. Actualmente Cantor es reconocido como el creador de un sistema matemático en que el que los números de magnitud infinita definen una jerarquía de infinitos con una aritmética muy precisa, dando un significado matemático a la idea de que hay infinitos más grandes que otros (Núñez, 2003), pero en su época se trató de una tarea sumamente atacada y cuestionada por la comunidad matemática que actuaba en su mismo escenario sociocultural.

> La idea de considerar lo infinitamente grande no sólo en la forma de una magnitud que se incrementa ilimitadamente y en la forma estrechamente relacionada con las series infinitas convergentes […] sino también de fijarlo matemáticamente por medio de números en la forma definida del infinito absoluto me fue impuesta lógicamente, casi contra mi voluntad puesto que es contraria a las tradiciones que yo había llegado a venerar en el curso de muchos años de esfuerzos e investigaciones científicas. (Cantor, citado por Lavine, 2005, p. 52)

Conclusiones

Creemos a partir del análisis que se acaba de presentar que hay dos infinitos que hay que distinguir y que responden, dentro y fuera de la matemática, a cuestiones diferentes: el infinito como distancia y el infinito como cantidad. Al primero llega Newton mirando el espacio, ese infinito es dinámico, tiene que ver con el movimiento, con el tiempo, con lo que se aleja… El otro, ese es el de Cantor y Bolzano y responde a ¿cuántos? en lugar de ¿hasta dónde? Este infinito, el de la cardinalidad, es estático, ese justifica la existencia de conjuntos que son en sí infinitos, y ese es el que veremos más adelante, se construye en la educación superior. Lo que nos preguntamos es: ¿es éste último el que nos permite entender las cuestiones relativas a los problemas que en las aulas se detectan en la enseñanza del cálculo? La idea de límite, de variación, descansa sobre un infinito, pero no es sobre el de Cantor y Bolzano, sino sobre el de Newton, que se mueve y nos muestra los cambios de lo que varía. El problema es que las funciones que llevamos a las aulas son funciones que responden a las definiciones conjuntistas de Cantor.

Tenemos entonces un infinito que está quieto, que es el cardinal de un conjunto y que se construye en la educación superior. Ese es el que está formalizado y el que nos aseguran en nuestra formación como profesores que es el infinito matemático. Pero encontramos que ese infinito, que los futuros profesores han logrado construir, no es el que usan al momento de pensar en límites o en funciones. ¿Por qué? Porque en el aula no se precisa de ese último concepto sino aquel de Newton, el de quienes entendían a las curvas como representación de lo que cambia. Pero ese infinito no lo tenemos formalizado ni es elemento de construcción en la formación docente, menos aún en la escuela media. ¿Alcanzaría con hacerlo aparecer en las clases de cálculo? Creemos que no, mientras se mantenga la aproximación que hacemos de las funciones en nuestros cursos. El cambio que necesitamos es mucho más profundo, el infinito no va a surgir sólo porque así lo pretendamos. Como todo, tiene que ser respuesta a una pregunta, idealmente, una pregunta que se hagan quienes pretendamos que lo construyan.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R. (1995) Matemática Educativa. *Pedagogía 10 (5),* 4-13

Castañeda, A. (2008). Desarrollo de la noción de graficación en la antigüedad. En C. Crespo Crespo, (Ed). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.* Vol. 21, pp. 503-508. México.

Castañeda, A., Buendía G., Crespo, C. Lezama, J., Molina, J., Montiel, G., Martínez, G., Rosas, A. y Sánchez, M. (2008). *Las líneas de investigación en el Programa de Matemática Educativa del CICATA-IPN.* Documento interno, Prome-Cicata-IPN. México.

De Mora Charles, M. (2009). Finito o infinito: una cuestión de gusto. *Ontology studies 9,* 43-54

Ferreirós, J. (2003): Del neohumanismo al organicismo: Gauss, Cantor y la matemática pura. En J. Montesinos, J. Ordóñez y S. Toledo (Eds.), *Ciencia y Romanticismo.* Tenerife: Fundación Orotava de Historia de la Ciencia

Koyré, A. (2008). *Del mundo cerrado al universo infinito.* Buenos Aires: Siglo XXI editores.

Lavine, S. (2005). *Comprendiendo el infinito.* México: Fondo de Cultura Económica.

Lestón, P. (2008). *Ideas previas a la construcción del infinito de escenarios no escolares*. Tesis de Maestría no publicada. CICATA del IPN, México.

Nuñez, R. (2003). Conceptual Metaphor and the Cognitive Foundations of Mathematics: Actual Infinity and Human Imagination. En B. Baaquie y P. Pang (Eds.) *Metaphor and Contemporary Science*, (pp. 49-72). Singapur: National University of Singapore.

Zellini, P. (1991). *Breve historia del infinito*. Madrid: Ediciones Siruela